

فصل سوم

روش تحلیل سلسله مراتبی

فازی (FAHP)^۱

۳-۱- مقدمه

هر چند هدف از به کارگیری روش تحلیل سلسله مراتبی به دست آوردن نظر کارشناسان و متخصصین است، با این وجود روش تحلیل سلسله مراتبی معمولی به درستی نحوه تفکر انسانی را منعکس نمی‌کند، زیرا در مقایسه‌های زوجی این روش از اعداد دقیق استفاده می‌شود. از دیگر مواردی که اغلب روش تحلیل سلسله مراتبی به خاطر آن‌ها مورد نکوهش قرار می‌گیرد عبارتند از: وجود مقیاس نامتوازن^۲ در قضاوت‌ها، عدم قطعیت و نادقیق بودن مقایسه‌های زوجی. تصمیم‌گیرندگان اغلب به علت طبیعت فازی مقایسه‌های زوجی قادر نیستند به صراحت نظرشان را در مورد برتری‌ها اعلام کنند. به همین دلیل در قضاوت‌هایشان ارائه یک بازه را به

1- Fuzzy Analytical Hierarchy Process

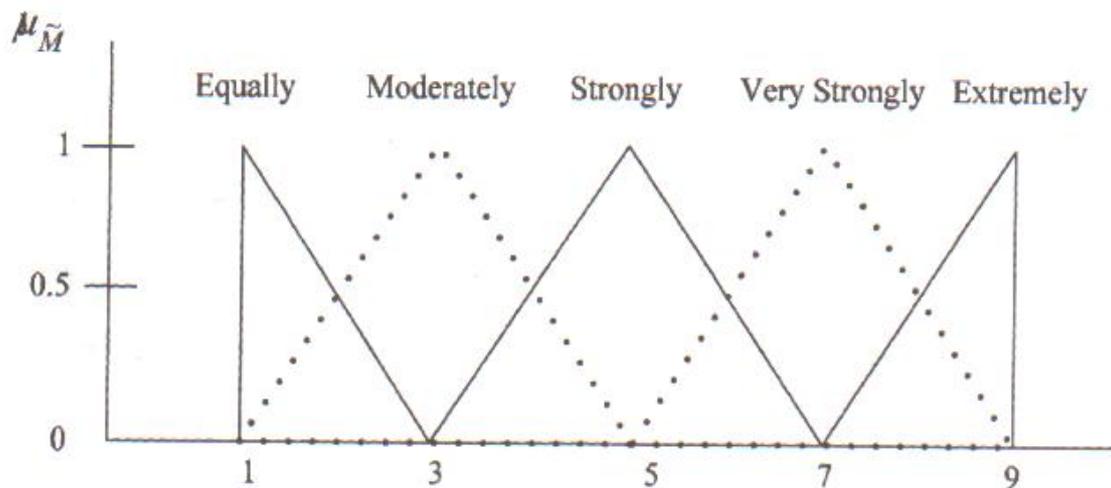
2- Unbalanced scale

جای یک عدد ثابت ترجیح می‌دهند. برای غلبه بر این مشکلات روش تحلیل سلسله مراتبی فازی ارائه شده است.

در روش تحلیل سلسله مراتبی فازی، پس از تهیه نمودار سلسله مراتبی از تصمیم‌گیرنده (یا تصمیم‌گیرندگان) خواسته می‌شود تا عناصر هر سطح را نسبت به هم مقایسه کنند و اهمیت نسبی عناصر را با استفاده از اعداد فازی بیان کنند. به طور مثال در جدول ۱-۳ نمونه‌ای از اعداد فازی مثلثی تعریف شده و توابع عضویت آن‌ها درج شده است. در شکل ۱-۳ نیز تابع عضویت فازی برای متغیرهای زبانی نشان داده شده است.

جدول ۱-۳- نمونه‌ای از اعداد فازی تعریف شده در روش تحلیل سلسله مراتبی فازی

عدد فازی	تعریف	مقیاس فازی مثلثی	دامنه	تابع عضویت
$\tilde{9}$	اهمیت مطلق	(7,9,9)	$7 \leq x \leq 9$	$\frac{x-7}{9-7}$
$\tilde{7}$	اهمیت خیلی قوی	(5,7,9)	$7 \leq x \leq 9$	$\frac{9-x}{9-7}$
			$5 \leq x \leq 7$	$\frac{x-5}{7-5}$
$\tilde{5}$	اهمیت قوی	(3,5,7)	$5 \leq x \leq 7$	$\frac{7-x}{7-5}$
			$3 \leq x \leq 5$	$\frac{x-3}{5-3}$
$\tilde{3}$	اهمیت ضعیف	(1,3,5)	$3 \leq x \leq 5$	$\frac{5-x}{5-3}$
			$1 \leq x \leq 3$	$\frac{x-1}{3-1}$
$\tilde{1}$	اهمیت یکسان	(1,1,3)	$1 \leq x \leq 3$	$\frac{3-x}{3-1}$
۱	دقیقاً مساوی	(1,1,1)	-	-



شکل ۳-۱- تابع عضویت فازی برای متغیرهای زبانی

کاربردهای مختلفی از روش تحلیل سلسله مراتبی فازی ارائه شده است که در جدول ۳-۲ نمونه‌هایی از آن‌ها ارائه شده است.

جدول ۳-۲- نمونه‌هایی از کاربرد روش تحلیل سلسله مراتبی فازی

ارائه دهنده	موضوع
Lee et al. (2008)	ارزیابی عملکرد دانشکده با استفاده از روش تحلیل سلسله مراتبی فازی
Kahraman et al. (2003)	انتخاب تأمین‌کننده با روش تحلیل سلسله مراتبی فازی
YU-Lung (2009)	انتخاب فناوری احیاکننده روان‌ساز
Zheng (2009)	بقای انرژی ساختمان
Zare et al. (2009)	انتخاب روش معدنکاری زیرزمینی برای معدن بوکسیت جاجرم در ایران
Ertugrul (2009)	ارزیابی عملکرد شرکت‌های سیمان ترکیه
Tseng (2009)	مطالعه بنیادین محصولات پاک‌کننده در کارخانه‌های PWB تایوان
Tang (2009)	تخصیص بودجه در شرکت فضائی
عطائی و همکاران (۱۳۸۷)	انتخاب روش معدنکاری زیرزمینی برای معدن بوکسیت جاجرم در ایران
جعفری‌مقدم (۱۳۸۸)	انتخاب ماشین حفاری مناسب تونل‌های کوچک مقطع
رفیعی (۱۳۸۸)	انتخاب سیستم نگهداری بهینه تونل بهشت‌آباد

۳-۲- مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی فازی

مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی فازی به روش چانگ^۱ به شرح زیر است:

مرحله ۱: رسم نمودار سلسله مراتبی

مرحله ۲: تعریف اعداد فازی به منظور انجام مقایسه‌های زوجی

مرحله ۳: تشکیل ماتریس مقایسه زوجی (\tilde{A}) با به کارگیری اعداد فازی

ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & 1 & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

که این ماتریس حاوی اعداد فازی زیر است:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \tilde{1}, \tilde{3}, \tilde{5}, \tilde{7}, \tilde{9} \text{ or } \tilde{1}^{-1}, \tilde{3}^{-1}, \tilde{5}^{-1}, \tilde{7}^{-1}, \tilde{9}^{-1} & i \neq j \end{cases}$$

اگر کمیته تصمیم‌گیرنده دارای چندین تصمیم‌گیرنده باشد، درایه‌های ماتریس مقایسه‌ی

زوجی جامع که در روش تحلیلی سلسله مراتبی فازی به کار می‌رود، یک عدد فازی مثلثی است

که مؤلفه اول آن حداقل نظرسنجی‌ها، مؤلفه دوم آن میانگین نظرسنجی‌ها و مؤلفه سوم آن

حداکثر نظرسنجی‌ها می‌باشد.

مرحله ۴: محاسبه S_i برای هر یک از سطرهای ماتریس مقایسه زوجی

S_i که خود یک عدد فازی مثلثی است از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$S_i = \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \otimes \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} \quad (1-3)$$

که در این رابطه i بیان گر شماره سطر و j بیان گر شماره ستون می باشد. در این رابطه اعداد فازی مثلثی ماتریس های مقایسه زوجی هستند. مقادیر M_{gi}^j ، $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j$ ، $\sum_{j=1}^m M_{gi}^j$ را می توان به ترتیب از روابط زیر محاسبه کرد:

$$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j = \left(\sum_{j=1}^m l_j, \sum_{j=1}^m m_j, \sum_{j=1}^m u_j \right) \quad (2-3)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j = \left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n u_i \right) \quad (3-3)$$

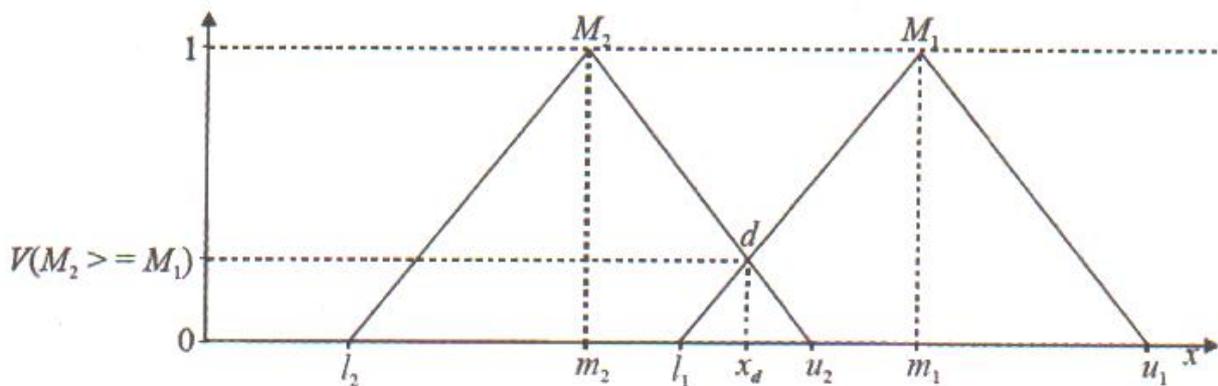
$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n u_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^n l_i} \right) \quad (4-3)$$

در روابط بالا l_i ، m_i و u_i به ترتیب مؤلفه های اول تا سوم اعداد فازی هستند.

مرحله ۵: محاسبه درجه بزرگی S_i ها نسبت به همدیگر

به طور کلی اگر $M_1 = (l_1, m_1, u_1)$ و $M_2 = (l_2, m_2, u_2)$ دو عدد فازی مثلثی باشند، طبق شکل ۲-۳ درجه بزرگی M_1 نسبت به M_2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(M_2 \geq M_1) = \text{hgt}(M_1 \cap M_2) = \mu_{M_1}(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } m_2 \geq m_1 \\ 0 & \text{if } l_1 \geq u_2 \\ \frac{l_1 - u_2}{(m_2 - u_2) - (m_1 - l_1)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-3)$$



شکل ۲-۳- درجه بزرگی دو عدد فازی نسبت به هم

از طرف دیگر میزان بزرگی یک عدد فازی مثلثی از K عدد فازی مثلثی دیگر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V(M \geq M_1, M_2, \dots, M_k) = V[(M \geq M_1) \text{ and } (M \geq M_2) \text{ and } \dots \text{ and } (M \geq M_k)] \quad (6-3)$$

$$= \text{Min} V(M \geq M_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

مرحله ۶: محاسبه وزن معیارها و گزینه‌ها در ماتریس‌های مقایسه زوجی

بدین منظور از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$d'(A_i) = \text{Min} V(S_i \geq S_k) \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad k \neq i \quad (7-3)$$

بنابراین بردار وزن نرمالیزه نشده به صورت زیر خواهد بود:

$$W' = (d'(A_1), d'(A_2), \dots, d'(A_n))^T \quad A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-3)$$

مرحله ۷: محاسبه بردار وزن نهایی

برای محاسبه بردار وزن نهایی باید بردار وزن محاسبه شده در مرحله قبل را نرمالیزه کرد. بنابراین:

$$W = (d(A_1), d(A_2), \dots, d(A_n))^T \quad (9-3)$$

به عنوان مثال ماتریس مقایسه زوجی زیر را در نظر بگیرید که داریهای این ماتریس اعداد

فازی مثلثی هستند:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	(1,1,1)	(2/5,1/2,2/3)	(1/2,2/3,1)	(1/2,1,3/2)	(1/2,2/3,1)
C_2	(3/2,2,5/2)	(1,1,1)	(3/2,2,5/2)	(2,5/2,3)	(3/2,2,5/2)
C_3	(1,3/2,2)	(2/5,1/2,2/3)	(1,1,1)	(1,3/2,2)	(1,3/2,2)
C_4	(2/3,1,2)	(1/3,2/5,1/2)	(1/2,2/3,1)	(1,1,1)	(1/2,2/3,1)
C_5	(1,3/2,2)	(2/5,1/2,2/3)	(1/2,2/3,1)	(1,3/2,2)	(1,1,1)

مقادیر $\sum_{j=1}^m M_{ij}^j$ برای هر یک از سطرهاى این ماتریس برابر است با:

$$C_1: \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + 1 \right) = (2.9, 3.833, 5.167)$$

$$C_2: \left(\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2}, 2 + 1 + 2 + \frac{5}{2} + 2, \frac{5}{2} + 1 + \frac{5}{2} + 3 + \frac{5}{2} \right) = (7.5, 9.5, 11.5)$$

$$C_3: \left(1 + \frac{2}{5} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}, 2 + \frac{2}{3} + 1 + 2 + 2\right) = (4.4, 6, 7.667)$$

$$C_4: \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3}, 2 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1\right) = (3, 3.733, 5.5)$$

$$C_5: \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + 1 + 1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1, 2 + \frac{2}{3} + 1 + 2 + 1\right) = (3.9, 5.167, 6.667)$$

مقدار $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j$ نیز برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j &= \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{2}{5} + 1 + 1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + 1 + 1, \right. \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} + 2 + 1 + 2 + \frac{5}{2} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1, \\ &1 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{5}{2} + 1 + \frac{5}{2} + 3 + \frac{5}{2} + 2 + \frac{2}{3} + 1 + 2 + 2 + 2 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 + 2 + \frac{2}{3} + 1 + 2 + 1) \\ &= (21.7, 28.233, 36.5) \end{aligned}$$

و لذا مقدار $\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j\right]^{-1}$ برابر است با:

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j\right]^{-1} = \left(\frac{1}{36.5}, \frac{1}{28.233}, \frac{1}{21.7}\right) = (0.0274, 0.0354, 0.04608)$$

S_i برای هر یک از سطریهای ماتریس مقایسه زوجی برابر است با:

$$S_1 \quad (2.9, 3.833, 5.167) \otimes (0.0274, 0.0354, 0.04608) = (0.079, 0.136, 0.238)$$

$$S_2 \quad (7.5, 9.5, 11.5) \otimes (0.0274, 0.0354, 0.04608) = (0.205, 0.336, 0.530)$$

$$S_3 \quad (4.4, 6, 7.667) \otimes (0.0274, 0.0354, 0.04608) = (0.121, 0.213, 0.353)$$

$$S_4 \quad (3, 3.733, 5.5) \otimes (0.0274, 0.0354, 0.04608) = (0.082, 0.132, 0.253)$$

$$S_5 \quad (3.9, 5.167, 6.667) \otimes (0.0274, 0.0354, 0.04608) = (0.107, 0.183, 0.307)$$

درجه بزرگی هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر به شرح زیر خواهد بود:

$$V(S_1 \geq S_2) = 0.14 \quad V(S_1 \geq S_3) = 0.61 \quad V(S_1 \geq S_4) = 1 \quad V(S_1 \geq S_5) = 0.74$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 1 \quad V(S_2 \geq S_3) = 1 \quad V(S_2 \geq S_4) = 1 \quad V(S_2 \geq S_5) = 1$$

$$V(S_3 \geq S_1) = 1 \quad V(S_3 \geq S_2) = 0.54 \quad V(S_3 \geq S_4) = 1 \quad V(S_3 \geq S_5) = 1$$

$$V(S_4 \geq S_1) = 0.98 \quad V(S_4 \geq S_2) = 0.19 \quad V(S_4 \geq S_3) = 0.62 \quad V(S_4 \geq S_5) = 0.74$$

$$V(S_5 \geq S_1) = 1 \quad V(S_5 \geq S_2) = 0.4 \quad V(S_5 \geq S_3) = 0.86 \quad V(S_5 \geq S_4) = 1$$

با توجه به مقادیر S_i نسبت به همدیگر، وزن نرمال نشده معیارها در ماتریس‌های مقایسه زوجی برابر است با:

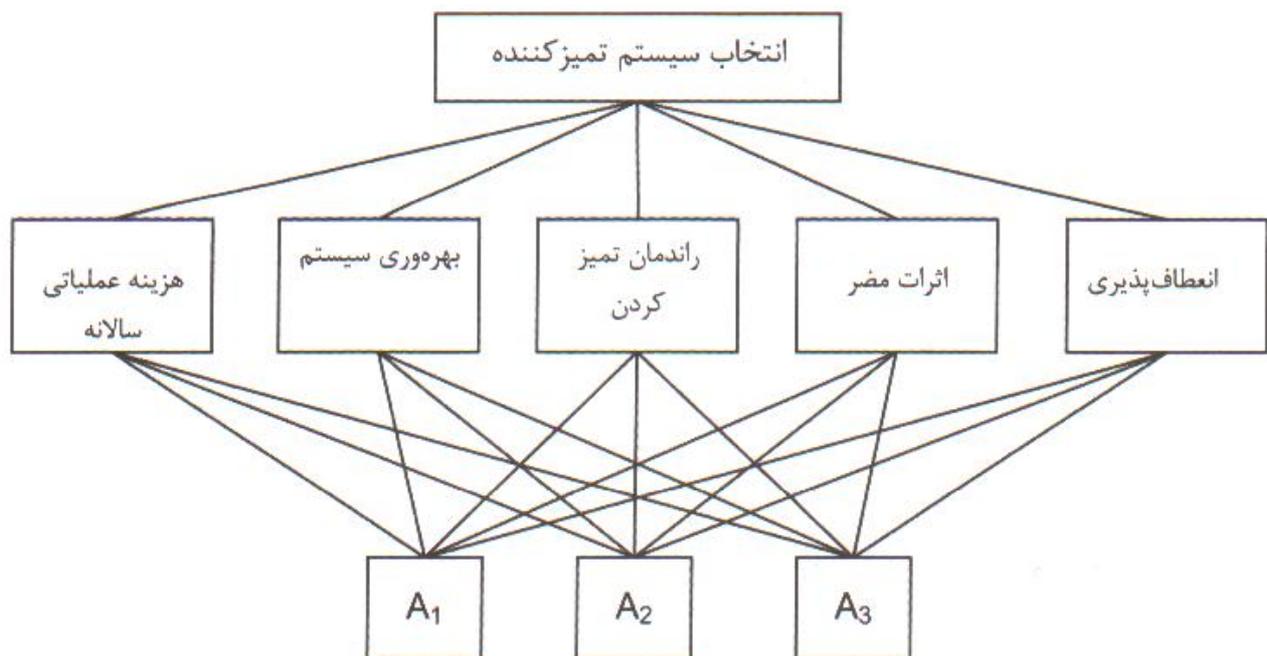
وزن نرمال نشده	وزن نرمال شده	
۰/۱۴	۰/۰۶۲	C_1
۱	۰/۴۴	C_2
۰/۵۴	۰/۲۳۹	C_3
۰/۱۹	۰/۰۸۴	C_4
۰/۴۰	۰/۱۷۵	C_5

سایر مراحل روش مشابه روش تحلیل سلسله مراتبی کلاسیک خواهد بود.

۳-۳- چند مثال از به کارگیری روش تحلیل سلسله مراتبی فازی

مثال ۱: انتخاب سیستم تمیزکننده

به منظور انتخاب سیستم تمیزکننده در یک کارخانه سه گزینه A_1 : سیستم تمیزکننده متداول، A_2 : سیستم تمیزکننده شیمیایی و A_3 : سیستم تمیزکننده اولتراسونیک به عنوان گزینه‌های ممکن مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای انتخاب گزینه مناسب پنج معیار در نظر گرفته شده‌اند: C_1 : هزینه عملیاتی سالانه، C_2 : بهره‌وری سیستم، C_3 : راندمان تمیز کردن، C_4 : اثرات مضر، C_5 : انعطاف‌پذیری. نمودار سلسله مراتبی این مسأله در شکل زیر نشان داده شده است.



به منظور تعیین گزینه مناسب با استفاده از روش تحلیل سلسله مراتبی فازی، در ابتدا

ماتریس‌های مقایسه زوجی ایجاد شده است که به شرح زیر است:

C_1	A_1	A_2	A_3
A_1	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{9}$
A_2	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{7}$
A_3	$\tilde{9}^{-1}$	$\tilde{7}^{-1}$	$\tilde{1}$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{4}$	$\tilde{3}$	$\tilde{3}$
C_2	$\tilde{2}^{-1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{3}$	$\tilde{2}$	$\tilde{3}$
C_3	$\tilde{4}^{-1}$	$\tilde{3}^{-1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{4}^{-1}$	$\tilde{2}^{-1}$
C_4	$\tilde{3}^{-1}$	$\tilde{2}^{-1}$	$\tilde{4}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$
C_5	$\tilde{3}^{-1}$	$\tilde{3}^{-1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{2}^{-1}$	$\tilde{1}$

ماتریس مقایسه زوجی بین معیارها

C_3	A_1	A_2	A_3
A_1	$\tilde{1}$	$\tilde{7}^{-1}$	$\tilde{5}^{-1}$
A_2	$\tilde{7}$	$\tilde{1}$	$\tilde{3}$
A_3	$\tilde{5}$	$\tilde{3}^{-1}$	$\tilde{1}$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_3

C_2	A_1	A_2	A_3
A_1	$\tilde{1}$	$\tilde{5}^{-1}$	$\tilde{8}^{-1}$
A_2	$\tilde{5}$	$\tilde{1}$	$\tilde{6}^{-1}$
A_3	$\tilde{8}$	$\tilde{6}$	$\tilde{1}$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_2

C_5	A_1	A_2	A_3
A_1	$\tilde{1}$	$\tilde{6}$	$\tilde{1}$
A_2	$\tilde{6}^{-1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{6}^{-1}$
A_3	$\tilde{1}$	$\tilde{6}$	$\tilde{1}$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_5

C_4	A_1	A_2	A_3
A_1	$\tilde{1}$	$\tilde{7}^{-1}$	$\tilde{8}^{-1}$
A_2	$\tilde{7}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$
A_3	$\tilde{8}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_4

درایه‌های ماتریس‌های مقایسه زوجی اعداد فازی مثلثی هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{1} = (1,1,1)$$

$$\tilde{2} = (1,2,4)$$

$$\tilde{3} = (1,3,5)$$

$$\tilde{4} = (2,4,6)$$

$$\tilde{5} = (3,5,7)$$

$$\tilde{2}^{-1} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\tilde{3}^{-1} = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$\tilde{4}^{-1} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\tilde{5}^{-1} = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\tilde{6} = (4,6,8)$$

$$\tilde{7} = (5,7,9)$$

$$\tilde{8} = (6,8,10)$$

$$\tilde{9} = (7,9,11)$$

$$\tilde{6}^{-1} = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\tilde{7}^{-1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right)$$

$$\tilde{8}^{-1} = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\tilde{9}^{-1} = \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}\right)$$

با توجه به اعداد فازی بالا ماتریس‌های مقایسه زوجی به صورت زیر خواهد بود:

C_1	A_1	A_2	A_3
A_1	(1,1,1)	(1,1,1)	(7,9,11)
A_2	(1,1,1)	(1,1,1)	(5,7,9)
A_3	(1/11,1/9,1/7)	(1/9,1/7,1/5)	(1,1,1)

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	(1,1,1)	(1,2,4)	(2,4,6)	(1,3,5)	(1,3,5)
C_2	(1/4,1/2,1)	(1,1,1)	(1,3,5)	(1,2,4)	(1,3,5)
C_3	(1/6,1/4,1/2)	(1/5,1/3,1)	(1,1,1)	(1/6,1/4,1/2)	(1/4,1/2,1)
C_4	(1/5,1/3,1)	(1/4,1/2,1)	(2,4,6)	(1,1,1)	(1,2,4)
C_5	(1/5,1/3,1)	(1/5,1/3,1)	(1,2,4)	(1/4,1/2,1)	(1,1,1)

ماتریس مقایسه زوجی بین معیارها

C_3	A_1	A_2	A_3
A_1	(1,1,1)	(1/9,1/7,1/5)	(1/7,1/5,1/3)
A_2	(5,7,9)	(1,1,1)	(1,3,5)
A_3	(3,5,7)	(1/5,1/3,1)	(1,1,1)

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_3

C_2	A_1	A_2	A_3
A_1	(1,1,1)	(1/7,1/5,1/3)	(1/10,1/8,1/6)
A_2	(3,5,7)	(1,1,1)	(1/8,1/6,1/4)
A_3	(6,8,10)	(4,6,8)	(1,1,1)

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_2

C_5	A_1	A_2	A_3
A_1	(1,1,1)	(4,6,8)	(1,1,1)
A_2	(1/8,1/6,1/4)	(1,1,1)	(1/8,1/6,1/4)
A_3	(1,1,1)	(4,6,8)	(1,1,1)

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_5

C_4	A_1	A_2	A_3
A_1	(1,1,1)	(1/9,1/7,1/5)	(1/10,1/8,1/6)
A_2	(5,7,9)	(1,1,1)	(1,1,1)
A_3	(6,8,10)	(1,1,1)	(1,1,1)

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_4

پس از شکل‌گیری ماتریس‌های مقایسه زوجی باید بردارهای وزن با استفاده از روش تحلیل

سلسله مراتبی فازی تعیین شود که این محاسبات به شرح زیر است:

ماتریس مقایسه زوجی فازی بین معیارها

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j$
C_1	(1,1,1)	(1,2,4)	(2,4,6)	(1,3,5)	(1,3,5)	(6,13,21)
C_2	(1/4,1/2,1)	(1,1,1)	(1,3,5)	(1,2,4)	(1,3,5)	(4.25,9.5,16)
C_3	(1/6,1/4,1/2)	(1/5,1/3,1)	(1,1,1)	(1/6,1/4,1/2)	(1/4,1/2,1)	(1.78,2.33,4)
C_4	(1/5,1/3,1)	(1/4,1/2,1)	(2,4,6)	(1,1,1)	(1,2,4)	(4.45,7.83,13)
C_5	(1/5,1/3,1)	(1/5,1/3,1)	(1,2,4)	(1/4,1/2,1)	(1,1,1)	(2.65,4.17,8)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j = (19.133, 36.833, 62) \quad \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} = (0.016, 0.027, 0.052)$$

$$S_1 = (6, 13, 21) \otimes (0.016, 0.027, 0.052) = (0.097, 0.353, 1.098)$$

$$S_2 = (4.25, 9.5, 16) \otimes (0.016, 0.027, 0.052) = (0.069, 0.258, 0.836)$$

$$S_3 = (1.78, 2.33, 4) \otimes (0.016, 0.027, 0.052) = (0.029, 0.063, 0.209)$$

$$S_4 = (4.45, 7.83, 13) \otimes (0.016, 0.027, 0.052) = (0.072, 0.213, 0.679)$$

$$S_5 = (2.65, 4.17, 8) \otimes (0.016, 0.027, 0.052) = (0.043, 0.113, 0.418)$$

درجه بزرگی هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر

$$V(S_1 \geq S_2) = 1.00 \quad V(S_1 \geq S_3) = 1.00 \quad V(S_1 \geq S_4) = 1.00 \quad V(S_1 \geq S_5) = 1.00$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 0.89 \quad V(S_2 \geq S_3) = 1.00 \quad V(S_2 \geq S_4) = 1.00 \quad V(S_2 \geq S_5) = 1.00$$

$$V(S_3 \geq S_1) = 0.28 \quad V(S_3 \geq S_2) = 0.42 \quad V(S_3 \geq S_4) = 0.48 \quad V(S_3 \geq S_5) = 0.77$$

$$V(S_4 \geq S_1) = 0.81 \quad V(S_4 \geq S_2) = 0.93 \quad V(S_4 \geq S_3) = 1.00 \quad V(S_4 \geq S_5) = 1.00$$

$$V(S_5 \geq S_1) = 0.57 \quad V(S_5 \geq S_2) = 0.71 \quad V(S_5 \geq S_3) = 1.00 \quad V(S_5 \geq S_4) = 0.78$$

وزن نرمال شده	وزن نرمال نشده	معیار
0.282	1.00	C_1
0.250	0.89	C_2
0.079	0.28	C_3
0.227	0.81	C_4
0.162	0.57	C_5

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_1

C_1	A_1	A_2	A_3	$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j$
A_1	(1,1,1)	(1,1,1)	(7,9,11)	(9,11,13)
A_2	(1,1,1)	(1,1,1)	(5,7,9)	(7,9,11)
A_3	(1/11,1/9,1/7)	(1/9,1/7,1/5)	(1,1,1)	(1.202,1.254,1.343)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j = (17.202, 21.254, 25.343) \quad \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} = (0.039, 0.047, 0.058)$$

$$S_1 = (9, 11, 13) \otimes (0.039, 0.047, 0.058) = (0.355, 0.518, 0.756)$$

$$S_2 = (7, 9, 11) \otimes (0.039, 0.047, 0.058) = (0.276, 0.423, 0.639)$$

$$S_3 = (1.202, 1.254, 1.343) \otimes (0.039, 0.047, 0.058) = (0.047, 0.059, 0.078)$$

درجه بزرگی هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر

وزن نرمال شده	وزن نرمال نشده	گزینه
0.571	1.00	A_1
0.429	0.75	A_2
0.000	0.00	A_3

$$V(S_1 \geq S_2) = 1.00 \quad V(S_1 \geq S_3) = 1.00$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 0.75 \quad V(S_2 \geq S_3) = 1.00$$

$$V(S_3 \geq S_1) = 0.00 \quad V(S_3 \geq S_2) = 0.00$$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_2

C_2	A_1	A_2	A_3	$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j$
A_1	(1,1,1)	(1/7,1/5,1/3)	(1/10,1/8,1/6)	(1.243,1.325,1.5)
A_2	(3,5,7)	(1,1,1)	(1/8,1/6,1/4)	(4.125,6.167,8.25)
A_3	(6,8,10)	(4,6,8)	(1,1,1)	(11,15,19)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j = (16.368, 22.492, 28.75) \quad \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} = (0.035, 0.044, 0.061)$$

$$S_1 = (1.243, 1.325, 1.5) \otimes (0.035, 0.044, 0.061) = (0.043, 0.059, 0.092)$$

$$S_2 = (4.125, 6.167, 8.25) \otimes (0.035, 0.044, 0.061) = (0.143, 0.274, 0.504)$$

$$S_3 = (11, 15, 19) \otimes (0.035, 0.044, 0.061) = (0.383, 0.667, 1.161)$$

درجه بزرگی هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر

وزن نرمال شده	وزن نرمال نشده	گزینه
0.000	0.00	A_1
0.191	0.24	A_2
0.809	1.00	A_3

$$V(S_1 \geq S_2) = 0.00 \quad V(S_1 \geq S_3) = 0.00$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 1.00 \quad V(S_2 \geq S_3) = 0.24$$

$$V(S_3 \geq S_1) = 1.00 \quad V(S_3 \geq S_2) = 1.00$$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_3

C_3	A_1	A_2	A_3	$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j$
A_1	(1,1,1)	(1/9,1/7,1/5)	(1/7,1/5,1/3)	(1.254,1.343,1.533)
A_2	(5,7,9)	(1,1,1)	(1,3,5)	(7,11,15)
A_3	(3,5,7)	(1/5,1/3,1)	(1,1,1)	(4.2,6.333,9)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j = (12.454, 18.676, 25.533) \quad \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} = (0.039, 0.054, 0.08)$$

$$S_1 = (1.254, 1.343, 1.533) \otimes (0.039, 0.054, 0.08) = (0.049, 0.072, 0.123)$$

$$S_2 = (7, 11, 15) \otimes (0.039, 0.054, 0.08) = (0.274, 0.589, 1.204)$$

$$S_3 = (4.2, 6.333, 9) \otimes (0.039, 0.054, 0.08) = (0.164, 0.339, 0.723)$$

درجه بزرگی هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر

وزن نرمال شده	وزن نرمال نشده	گزینه
0.000	0.00	A_1
0.609	1.00	A_2
0.391	0.64	A_3

$$V(S_1 \geq S_2) = 0.00 \quad V(S_1 \geq S_3) = 0.00$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 1.00 \quad V(S_2 \geq S_3) = 1.00$$

$$V(S_3 \geq S_1) = 1.00 \quad V(S_3 \geq S_2) = 0.64$$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_4

C_4	A_1	A_2	A_3	$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j$
A_1	(1,1,1)	(1/9,1/7,1/5)	(1/10,1/8,1/6)	(1.211,1.268,1.367)
A_2	(5,7,9)	(1,1,1)	(1,1,1)	(7,9,11)
A_3	(6,8,10)	(1,1,1)	(1,1,1)	(8,10,12)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j = (16.211, 20.268, 24.367) \quad \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} = (0.41, 0.049, 0.062)$$

$$S_1 = (1.211, 1.268, 1.367) \otimes (0.41, 0.049, 0.062) = (0.050, 0.063, 0.084)$$

$$S_2 = (7, 9, 11) \otimes (0.41, 0.049, 0.062) = (0.287, 0.444, 0.679)$$

$$S_3 = (8, 10, 12) \otimes (0.41, 0.049, 0.062) = (0.323, 0.493, 0.740)$$

درجه بزرگی هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر

وزن نرمال شده	وزن نرمال نشده	گزینه
0.000	0.00	A_1
0.467	0.88	A_2
0.533	1.00	A_3

$$V(S_1 \geq S_2) = 0.00 \quad V(S_1 \geq S_3) = 0.00$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 1.00 \quad V(S_2 \geq S_3) = 0.88$$

$$V(S_3 \geq S_1) = 1.00 \quad V(S_3 \geq S_2) = 1.00$$

ماتریس مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار C_5

C_5	A_1	A_2	A_3	$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j$
A_1	(1,1,1)	(4,6,8)	(1,1,1)	(6,8,10)
A_2	(1/8,1/6,1/4)	(1,1,1)	(1/8,1/6,1/4)	(1.25,1.333,1.5)
A_3	(1,1,1)	(4,6,8)	(1,1,1)	(6,8,10)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j = (13.25, 17.333, 21.5)$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^j \right]^{-1} = (0.047, 0.058, 0.075)$$

$$S_1 = (6,8,10) \otimes (0.047, 0.058, 0.075) = (0.279, 0.462, 0.755)$$

$$S_2 = (1.25, 1.333, 1.5) \otimes (0.047, 0.058, 0.075) = (0.058, 0.077, 0.113)$$

$$S_3 = (6,8,10) \otimes (0.047, 0.058, 0.075) = (0.279, 0.462, 0.755)$$

درجه بزرگی هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر

گزینه	وزن نرمال نشده	وزن نرمال شده
A_1	1.00	0.500
A_2	0.00	0.000
A_3	1.00	0.500

$$V(S_1 \geq S_2) = 1.00 \quad V(S_1 \geq S_3) = 1.00$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 0.00 \quad V(S_2 \geq S_3) = 0.00$$

$$V(S_3 \geq S_1) = 1.00 \quad V(S_3 \geq S_2) = 1.00$$

به طور خلاصه نتایج محاسبه ضرایب اهمیت در ماتریس‌های مقایسه زوجی و امتیاز هر

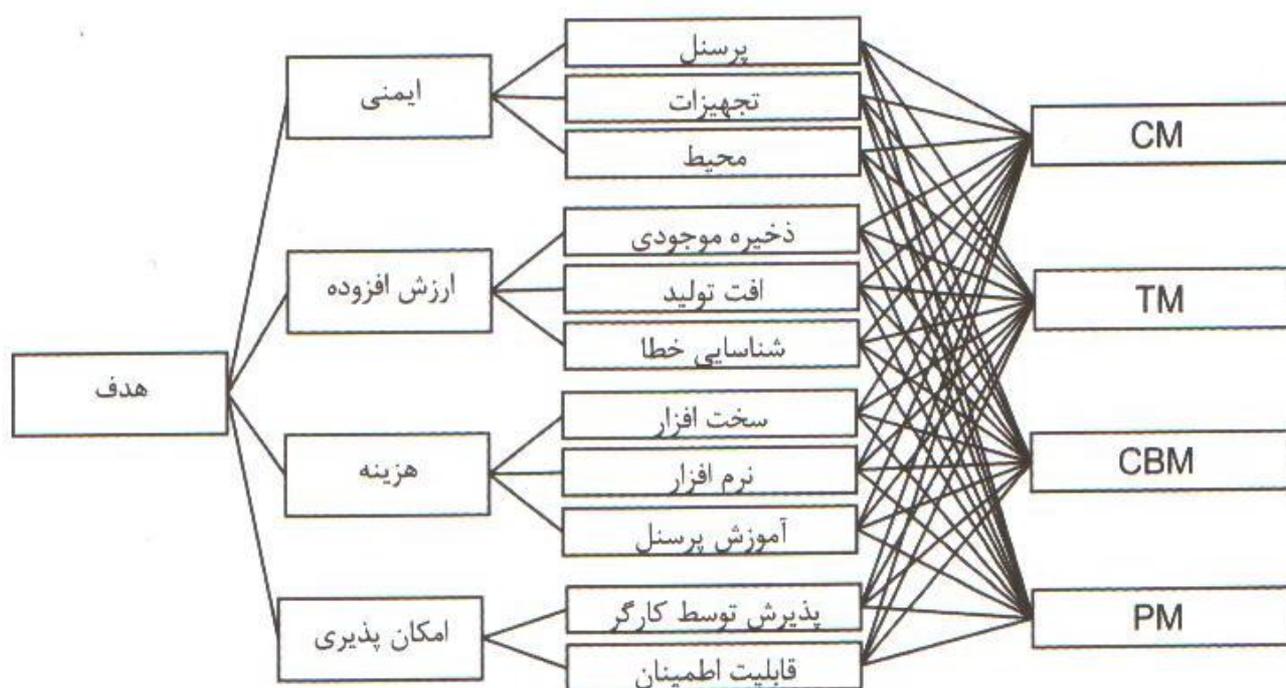
یک از گزینه‌ها به شرح زیر است:

جمع امتیاز	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	وزن
	۰/۱۶	۰/۲۲۸	۰/۰۷۹	۰/۲۵	۰/۲۸۳	
A_1	۰/۲۴۲	۰/۵	۰	۰	۰/۵۷۱	
A_2	۰/۳۲۳	۰	۰/۴۶۷	۰/۶۰۹	۰/۱۹۱	
A_3	۰/۴۳۵	۰/۵	۰/۵۳۳	۰/۳۹۱	۰/۸۰۹	

بنابراین اولویت‌بندی گزینه‌ها به صورت $A_3 > A_2 > A_1$ خواهد بود.

مثال ۲: انتخاب استراتژی تعمیر و نگهداری

در یک نیروگاه حرارتی کوچک برای اطمینان از تولید برق و گرمای مداوم، تعمیر و نگهداری بیش از ۷۰ قطعه از تجهیزات این نیروگاه در دستور کار قرار دارد. اما مدیریت از این برنامه راضی نیست و می‌خواهد برنامه تعمیر و نگهداری را بدون افزایش در سرمایه‌گذاری بهبود بخشد. بنابراین به دنبال بهترین استراتژی تعمیر و نگهداری می‌باشد. با مصاحبه از مدیران و کارکنان بخش تعمیر و نگهداری، معیارها و زیرمعیارهای تصمیم‌گیری و گزینه‌های مسأله تعیین و در نمودار سلسله مراتبی زیر درج شده است.



ماتریس‌های مقایسه زوجی فازی به شرح زیر است:

	ایمنی	هزینه	ارزش افزوده	امکان‌پذیری
ایمنی	(1,1,1)	(3,4,5)	(1,2,3)	(2,3,4)
هزینه	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1/4,1/3,1/2)	(1/3,1/2,1)
ارزش افزوده	(1/3,1/2,1)	(2,3,4)	(1,1,1)	(1,2,3)
امکان‌پذیری	(1/4,1/3,1/2)	(1,2,3)	(1/3,1/2,1)	(1,1,1)